Lösung elementarer Gleichungen

quadratische Gleichungen

allgemeine Form: $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$

Normalform: $\boxed{x^2 + px + q = 0}$

quadratisch ergänzte Form: $\boxed{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}$

p-q-Formel: $\boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)}$$

Satz von Vieta:

$$\boxed{x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)}, \text{ wo}$$

$$\cancel{x_{1}=}\ \boxed{\begin{aligned} p &= -(x_1 + x_2) \\ q &= x_1 \cdot x_2 \end{aligned}}$$

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Additionsverfahren: $\left.\begin{aligned} 3x - 4y &= 2 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} -6x + 8y &= -4 \\ 6x + 9y &= 21 \end{aligned}\right. +$

$$17y = 17$$

Einsetzungsverfahren: nach einer Variable auflösen und in andere Gleichung einsetzen

Gleichsetzungsverfahren: Beide nach einer Variable auflösen u. gleichsetzen

Rechenregeln

Körperaxiome:

A1) $x+y=y+x$

A2) $(x+y)+z=x+(y+z)$

A3) $0+x=x$ → neutrales Element der Addition

A4) $x+(-x)=0$ → additives Inverses

M1) $x\cdot y=y\cdot x$

M2) $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$

M3) $1\cdot x=x$ → neutrales Element der Multiplikation $(1\neq 0)$

M4) $x\cdot x^{-1}=1$ → multiplikatives Inverses $(x\neq 0)$

AM) $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$

Körper:

"field"

Menge $\mathbb{K}$, für die Addition u. Multiplikation definiert sind, sodass die Körperaxiome erfüllt sind

z.B. $\mathbb{Q}$ sind ein Körper, $\mathbb{Z}$ sind kein Körper, $\mathbb{F}_2$ sind ein Körper

$\{1;0\}$

Nullteilerfreiheit

$$\boxed{\forall a,b\in\mathbb{K}:\ a\cdot b=0 \iff a=0 \lor b=0}$$

Sätze

- Nullelement eindeutig bestimmt
- Einserelement eindeutig bestimmt
- additives Inverses eindeutig bestimmt
- multiplikatives Inverses eindeutig bestimmt
- lineare u. multiplikative Gleichungen haben eine eindeutige Lösung

$a,b\in\mathbb{K}$ $\quad a+x=b$, $\quad x=(-a)+b$

$a,b\in\mathbb{K},\ a\neq 0$ $\quad a\cdot x=b$, $\quad x=a^{-1}\cdot b$

- jeder Bruch $\frac{a}{b}$ kann als $\pm\frac{m}{n}$ mit $m,n\in\mathbb{N}$ geschrieben werden
- jeder Bruch kann vollständig gekürzt werden

BRUNNEN

$0^0:=1$

Anordnung

- $x \leq y \lor y \leq x$
- $x \leq x$ Reflexivität
- $x \leq y \land y \leq x \Rightarrow x = y$ Antisymmetrie
- $x \leq y \land y \leq z \Rightarrow x \leq z$ Transitivität
- $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ Monotonie bzgl. $+$
- $x \leq y \land 0 \leq z \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$ Monotonie bzgl. $\cdot$

Beweise

$\boxed{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow \boxed{\neg B \Rightarrow \neg A} \Leftrightarrow \boxed{A \wedge \neg B \Rightarrow F}$

direkter Beweis | indirekter Beweis (durch Kontraposition) | Widerspruchsbeweis

z.B. Satz von Euklid

Vollständige Induktion: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \text{ beweisen}}$

Bsp. Beh.: $\frac{n}{2} \cdot (n+1) = \sum_{j=1}^{n} j$

(IA) $n=1$: $\frac{1}{2} \cdot (1+1) = 1 = \sum_{j=1}^{1} j$

I-Annahme, wahr

(IS) $\frac{n}{2} \cdot (n+1) = \ldots$ $\quad \frac{n+1}{2} \cdot ((n+1)+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$= \frac{n^2+2n+n+2}{2}$

$= \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2}$

$= \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1)$

$= \frac{n}{2} \cdot (n+1) + (n+1)$